

# THOMAS KUHN ȘI GEOMETRIA HIPERBOLICĂ

Adrian HAGIU<sup>1</sup>

**Abstract:** *In the present study, we propose a discussion from a Kuhnian perspective on the status of revolutions in mathematics in general; and in particular, we will query to what extent we can say that hyperbolic geometry produces such a scientific revolution. Given that this debate already possesses its own intellectual history, we will attempt to substantiate the proposed thesis – namely, that the emergence of hyperbolic geometry indeed triggered a revolution within mathematics, though one that must be interpreted in a particular way – by pursuing four specific objectives: (1) an exposition of Euclid's ideas; (2) an overview of several historical leaps in the attempt to prove Euclid's fifth postulate; (3) an incursion into Kuhn's views on the structure of scientific revolutions; and (4) a reflection on whether Kuhn's concepts are applicable to the development of hyperbolic geometry. As the nature of this work is both historical and philosophical, we will approach the aforementioned ideas and concepts through descriptive and hermeneutic methods. Furthermore, the present study is significant within the broader landscape of philosophical inquiry as, on the one hand, it not only interrogates the role of scientific revolutions within mathematics but, on the other hand, also offers an opportunity to highlight the philosophical importance of hyperbolic geometry in shaping the very way that people perceive space.*

**Keywords:** *Kuhn, Euclid, scientific revolution, hyperbolic geometry, philosophy of science.*

## Introducere

În literatura de specialitate găsim lucrări în care se discută despre importanța ideilor lui Thomas Kuhn<sup>2</sup> și despre modul în care acestea pot fi aplicate în matematică în general. Este, așadar, prielnică o reflecție asupra

---

<sup>1</sup> "Alexandru Ioan Cuza" University of Iasi, Romania.

<sup>2</sup> Thomas S. Kuhn, *Structura revoluțiilor științifice*, traducere de Radu J. Bogdan, prefață de Mircea Flonta, București, Humanitas, 2008.

geometriei hiperbolice și asupra schimbării înțelegerii spațiului<sup>3</sup> care a survenit odată cu aceasta. Desigur, după cum vom arăta, geometria hiperbolică face parte din geometriile neeuclidiene, adică acele geometrii care contrazic axioma a cincea din setul stabilit de Euclid. Ne interesează numai dacă aceste geometrii neeuclidine – în speță, geometria hiperbolică – au produs o revoluție în matematică, în sensul dat de Kuhn.

Mai simplu, teza lucrării de față este aceea de a justifica, urmând o direcție a criticii lui Kuhn că într-adevăr apariția geometriei hiperbolice a produs o revoluție în matematică, dar această revoluție trebuie interpretată într-un anume fel. Ca atare, obiectivele prezentului studiu sunt următoarele: 1) menționarea ideilor fundamentale (a sistemului de axiome) care se găsesc în „Elementele” lui Euclid; 2) prezentarea câtorva momente importante din istoria geometriei care au condus către o nouă înțelegere a spațiului, adică trecerea în revistă a principalelor idei ale unor matematicieni precum Saccheri, Lambert, Legendre, Lobachevsky, Bolyai, Gauss etc.; 3) întoarcerea către *Structura* lui Kuhn și prezentarea elementelor acesteia și 4) o discuție pe marginea dezvoltării geometriei hiperbolice și contextualizarea dezbarerii cu privire la existența revoluțiilor științifice în matematică.

Vom încerca să argumentăm teza propusă în studiul de față gândind deopotrivă istoric și hermeneutic, cu scopul de a conduce discuția către unele considerații metafizice – pentru că marea provocare a unei revoluții științifice, după cum arată Kuhn în capitolul al X-lea al cărții – capitol problematic, de altfel, și adesea criticat de filosofii științei –, este aceea de a schimba modul în care privim lumea.

### Dezvoltarea geometriei hiperbolice

„Elementele” lui Euclid reprezintă primul tratat important de geometrie. Matematicianul antic a reușit să adune laolaltă rezultatele acelor timpuri, propunând însă și unele noutăți. De altfel, în această lucrare apar pentru prima oară formulate axiomele pe baza cărora geometria s-a

---

<sup>3</sup> Recent, Mircea Dumitru și Liviu Ornea, pornind de la teoremele de scufundare ale lui Nash, au vorbit despre preeminența geometriei euclidiene, dovedind, încă o dată, că modelele geometriei neeuclidiene sunt întemeiate în geometria euclidiană (Dumitru, Mircea, Ornea, Liviu, „On the Preeminence of Euclidean Geometry: Nash’s Embedding Theorems”, în *Journal for General Philosophy of Science*, Vol. 56, pp. 47-57, 2025. <https://doi.org/10.1007/s10838-024-09684-7>).

dezvoltat în următoarele câteva sute de ani. Acest „sistem axiomatic” – în terminologia de astăzi – al lui Euclid a condus la ceea ce noi numim geometrie euclidiană. Evoluția geometriei (în general) are un parcurs mai complicat decât ar părea la o simplă privire. Bogdan Suceavă arată, de exemplu, că noțiunea de curbura (care este esențială înțelegerii geometriei „moderne”) a apărut prima oară în scrierile medievalului Nicole Oresme (1323-1382) și că există asemănări cu ceea ce demonstrează Riemann câteva sute de ani mai târziu<sup>4</sup>. De aceea, scopul acestei secțiuni este a lămuri modul în care, plecând de la axiomele lui Euclid, au apărut celelalte tipuri de geometrie, interesându-ne numai de geometria hiperbolică.

Euclid (325-265 î.Cr.) a oferit în „Elementele”<sup>5</sup> un mod „a face” matematică. Chiar dacă, așa cum observă Ian Stewart, cele treisprezece cărți ale Elementelor se succed într-o ordine logică, fiind prezentate aspecte atât de geometrie plană, cât și de geometrie în spațiu – punctul culminant fiind demonstrația faptului că există exact cinci corpuri regulate: tetraedrul, cubul, octaedrul, dodecaedrul și icosaedrul<sup>6</sup> –; postulatele gânditorului antic au rămas pentru matematica modernă o provocare. Dincolo de aspectele filosofice ale modului euclidian de gândire și de diversele polemici care au apărut de-a lungul vremii<sup>7</sup>, „Elementele” îi fascinează încă pe matematicieni prin modul admirabil în care au fost organizate și prin faptul că Euclid a dezvoltat geometria plană pornind de la o listă de definiții ale termenilor geometrici, cinci „noțiuni comune” referitoare la mărimi și celebrele cinci axiome<sup>8</sup>, dintre care a cincea a fost cea contestată și

---

<sup>4</sup> Bogdan Suceavă, „Space and its deformations in the works of Nicole Oresme and Bernhard Riemann”, în *Rev. Roum. Philosophie*, 67, 2, pp. 303–311, București, 2023.

<sup>5</sup> Trebuie spus că nu știm foarte multe despre Euclid, acesta fiind cunoscut mai ales prin lucrările de matematică rămase. De asemenea, trebuie menționat că „Elementele” se găsesc traduse în limba engleză, în trei volume; traducerea fiind semnată de T.L. Heath și publicată în 1908 cu titlul: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Cambridge: at the University Press.

<sup>6</sup> Ian Stewart, *Îmblânzirea infinitului. Povestea matematicii*, traducere de N. Gutium, București, Humanitas, 2011, p. 29.

<sup>7</sup> O discuție asupra acestor chestiuni se găsește, în limba română, de pildă, în Marin Țurlea, *Filosofia matematicii*, București, Editura Universității din București, 2002.

<sup>8</sup> John G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Second Edition, Springer, 2006, p. 1.

contrazisă. În sfârșit, iată cele cinci postulate, adică axiome<sup>9</sup>, parafrazate și adaptate limbajului actual<sup>10</sup>:

1. Pentru oricare două puncte există o dreaptă care le unește.
2. Orice dreaptă poate fi prelungită indefinit.
3. Pentru orice punct dat și orice segment dat, se poate construi un cerc cu centrul în punctul dat și având raza egală cu lungimea segmentului dat.
4. Toate unghiurile drepte sunt egale.
5. Dacă o dreaptă coplanară cu alte două drepte le intersectează și formează cu acestea unghiuri interne, de aceeași parte, cu suma mai mică decât două unghiuri drepte, atunci cele două drepte se intersectează în acea parte a secantei în care suma celor două unghiuri este mai mică decât două unghiuri drepte.

Desigur, nu vom discuta mai departe fiecare axiomă în parte, ci ne vom opri la cea de-a cincea. Se poate observa, de altfel, că enunțul acesteia este ceva mai complicat decât enunțurile celorlalte. Bunăoară, aproape două milenii a existat bănuiala că această a cincea axiomă ar putea fi dedusă din primele patru. Despre câteva încercări în acest sens vom discuta mai jos. Ceea ce este însă interesant de menționat este că există câteva afirmații echivalente cu postulatul al V-lea; de exemplu:

- „1. Printr-un punct nesituat pe o dreaptă se poate duce cel mult o paralelă la acea dreaptă;
2. Două drepte paralele tăiate de o secantă formează cu aceasta unghiuri alterne interne egale;
3. Suma unghiurilor într-un triunghi este egală cu suma a două unghiuri drepte;
4. Două drepte paralele cu o a treia sunt paralele între ele;
5. Toate triunghiurile au aceeași sumă a unghiurilor lor;
6. Prin orice punct interior unui unghi se poate duce o dreaptă care să intersecteze laturile unghiului;
7. Există triunghiuri asemenea, dar neegale;
8. Punctele dintr-un semiplan situate la o distanță dată de o dreaptă dată formează o dreaptă;

---

<sup>9</sup> Euclid, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Volume 1, trans. by T.L. Heath, Cambridge: at the University Press, 1908, pp. 154-155.

<sup>10</sup> Vasile Oproiu, „Despre postulatul V al lui Euclid”, în *Recreații matematice*, II(1), 2000, pp. 23-26, p. 24.

9. Pentru oricare trei puncte necoliniare există cercul circumscris;
10. Linia mijlocie într-un triunghi este egală cu jumătatea bazei;
11. În orice triunghi dreptunghic este valabilă teorema lui Pitagora<sup>11</sup>.

Cel mai adesea, încercările de a deduce postulatul al cincilea (din primele patru) sau de a-l contrazice au venit ca replică la prima afirmație de mai sus. De altfel, anticipând, tocmai în acest mod a apărut geometria hiperbolică: negând postulatul al cincilea al paralelelor; adică acceptând că printr-un punct exterior unei drepte se pot duce mai multe paralele la dreapta dată (sau nu se poate duce niciuna). Aceste lucruri au fost evidențiate de Lobachevski și de Bolyai, interesante fiind și unele observații timpurii ale lui Saccheri, Lambert și chiar Legendre, asupra cărora ne oprim mai departe.

Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733) a fost un matematician, filosof și teolog italian, care în anul morții sale, 1733, a scris o lucrare de geometrie<sup>12</sup> în care, printre altele, a postulat că una dintre următoarele afirmații trebuie să fie adevărată:

- 1) Suma unghiurilor unui triunghi este egală cu  $\pi$ .
- 2) Suma unghiurilor unui triunghi este mai mică decât  $\pi$ .
- 3) Suma unghiurilor unui triunghi este mai mare decât  $\pi$ .

Acest fapt i-a permis să folosească metoda reducerii la absurd, în sensul că dacă a doua ipoteză și a treia sunt false, atunci prima trebuie să fie adevărată.<sup>13</sup> Totuși, prima afirmație, după cum am constatat mai sus, este echivalentă cu postulatul al cincilea al lui Euclid; iar dacă Saccheri a crezut că a treia afirmație duce la o contradicție în primele patru axiome, se pare că dovezile acestuia au fost întrucâtva greșite, pentru că, altfel, ar fi reușit să demonstreze postulatul paralelelor<sup>14</sup>.

De asemenea, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) a fost matematician, fizician și astronom, având diverse contribuții în domeniile amintite. A avut însă și unele contribuții cel puțin interesante în ceea ce numim geometrie neeuclidiană. Bunăoară, în *Theorie der Parallellinien*,

<sup>11</sup> *Ibidem*, p. 24.

<sup>12</sup> Gerolamo Saccheri, *Euclid Vindicated from Every Blemish*, Edited and Annotated by Vincenzo De Risi, Translated by G.B. Halsted and L. Allegri, Birkhäuser, 2014.

<sup>13</sup> Jeremy Gray, „Non-Euclidean Geometry – A Re-interpretation”, in *Historia mathematica*, 6, 1979, pp. 236–258, p. 238.

<sup>14</sup> Sverrir Thorgeirsson, *Hyperbolic geometry: history, models, and axioms*, Uppsala University, 2014, p. 4.

lucrare a lui Lambert ce avea să fie publicată postum, în 1786, de către Johann Bernoulli (al treilea)<sup>15</sup> găsim câteva mențiuni importante cu privire la postulatul al cincilea al lui Euclid. Se pare că Lambert ar fi citit lucrarea lui Saccheri, întrucât a susținut, precum matematicianul italian, că dacă suma unghiurilor unui triunghi este mai mare decât  $\pi$ , atunci fiecare triunghi are suma unghiurilor mai mare decât  $\pi$ ; și, mai mult, a derivat o contradicție asupra acestui fapt. Desigur, afirmația „într-un triunghi suma unghiurilor este mai mică decât  $\pi$ ” nu a considerat-o eronată<sup>16</sup>. În sfârșit, mai spunem că Lambert a oferit o formulă pentru a calcula aria unui triunghi hiperbolic<sup>17</sup>. Astfel, produsul dintre aria unui triunghi hiperbolic și o constantă  $C$  este egal cu diferența dintre  $\pi$  și suma unghiurilor triunghiului. Constanta menționată înmulțită cu minus va deveni mai târziu curbura gaussiană a unui plan hiperbolic. Roger Penrose arată că formula indicată seamănă cu o formulă dată de Thomas Hariot (1560-1621) pentru aria unui triunghi sferic, anume: aria unui triunghi sferic este egală cu produsul dintre pătratul razei sferei și diferența (de această dată) dintre suma unghiurilor triunghiului și  $\pi$ <sup>18</sup>.

În sfârșit, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) a fost un alt matematician pentru care postulatul al cincilea a fost o provocare. Deși este cunoscut și pentru alte contribuții, cum ar fi, de pildă, transformarea care îi poartă numele, încercările acestuia de a demonstra postulatul amintit au eșuat. Legendre a folosit definiția defectului unui triunghi – dacă suma unghiurilor unui triunghi este mai mică decât  $\pi$ , defectul reprezintă diferența dintre  $\pi$  și suma unghiurilor – pentru a demonstra că, de fapt, suma unghiurilor este egală cu zero. Mai târziu, modelul lui Beltrami a confirmat faptul că Legendre greșise<sup>19</sup>.

Pe de altă parte, Nikolai Lobachevsky (1792–1856) și János Bolyai (1802–1860) au avut idei revoluționare în ceea ce privește postulatul al cincilea al lui Euclid. Aproape în aceeași perioadă, în mod independent, cei doi matematicieni au contestat axioma paralelelor și au reușit să

---

<sup>15</sup> Jeremy Gray, *Worlds out of nothing: a course in the history of geometry in the 19th Century*, London, Springer, 2011, p. 85.

<sup>16</sup> *Ibidem*, p. 85.

<sup>17</sup> Roger Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, London, Jonathan Cape, 2004, p. 43.

<sup>18</sup> *Ibidem*, p. 44.

<sup>19</sup> Jeremy Gray, *Op. cit.*, p. 225.

demonstreze unele rezultate importante. Chiar dacă, odată cu aceștia, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) lucra deja și el la o teorie care să contrazică postulatul amintit, dar cel din urmă și-a publicat descoperirile ceva mai târziu. De altfel, se pare că Gauss „descoperise” geometria hiperbolică înaintea celorlalți doi<sup>20</sup>.

Lobachevsky, Bolyai și Gauss au oferit prin cercetările lor o bază sintetică asupra geometriei neeuclidiene; le-a lipsit însă un model analitic pentru o astfel de geometrie. Mai mult, ei nu au demonstrat că această geometrie neeuclidiană este consistentă; acest lucru a fost arătat ceva mai târziu, odată cu apariția unui model. Lobachevsky, de exemplu, a descoperit câteva formule pentru trigonometria neeuclidiană și a constatat că pe baza acestora se poate deduce că geometria neeuclidiană este consistentă<sup>21</sup>; cu alte cuvinte, sistemul axiomatic al acesteia este consistent. Totuși, dincolo de aceste mențiuni trebuie spus că contribuțiile acestuia s-au bazat pe primele patru axiome din sistemul lui Euclid, iar postulatul al cincilea, numit adesea și „axioma hiperbolică”, în acest context, capătă următoarea formulare: „Dată o dreaptă și un punct exterior acesteia se pot construi prin acest punct mai multe paralele la dreapta dată”.

În sfârșit, consistența geometriei hiperbolice, după cum am amintit, a apărut odată cu modelele pentru aceasta, fapt pentru care a fost nevoie de unele contribuții ale lui Euler, Gaspard Monge și, din nou, Gauss (mai ales cu privire asupra noțiunii de curbura)<sup>22</sup>. Modelele au apărut în scrierile lui Eugenio Beltrami (1835-1900), Felix Klein (1849-1925) și Henri Poincaré (1854-1912), spre sfârșitul secolului al XIX-lea și începutul celui de-al XX-lea. Aceștia au creat modele pentru geometria hiperbolică și, ca atare, abia odată cu acestea i-au demonstrat consistența.

Am amintit mai sus despre constanta  $C$  din formula lui Lambert că a condus la ceea ce mai târziu s-a numit curbura. Ne survine, așadar, întrebarea: ce este curbura? Ce este curbura unei curbe, de exemplu? Dar a unei suprafețe? Intuitiv, curbura arată modul în care o curbă din plan, de pildă, este brusc „îndoită”; altfel spus, arată cât de deviată este această curbă într-un punct față de tangenta dusă în același punct. De altfel, se

<sup>20</sup> Michael Hvidsten, *Exploring geometry*, Draft: October 18, 2012, p. 265.

<sup>21</sup> J.W. Cannon, W.J. Floyd, R. Kenyon, and W.R. Parry, „Hyperbolic geometry”, MSRI Publications 31, 1997, pp. 59-115, p. 62.

<sup>22</sup> *Ibidem*, p. 62.

poate observa că pentru studiul unor curbe (dar la fel și în cazul suprafețelor) noțiunea de curbura este indispensabilă.

Aceasta a fost introdusă de Gauss. Bunăoară, în „Cercetare generală asupra suprafețelor curbe”, Gauss notează în paragraful al VI-lea următoarele: „Pentru studiul relațiilor de cantitate, ni se pare util să introducem, în teoria suprafețelor curbe, câteva noțiuni noi. Dată o porțiune de suprafață curbă, cuprinsă într-un perimetru determinat, vom spune că are drept *curbură totală* sau *integrală* aria figurii care îi corespunde pe suprafața sferică auxiliară. E bine să facem distincție între această curbura integrală și curbura, oarecum specifică, pe care o vom numi *măsură a curburii* și care înseamnă câtul obținut prin împărțirea curburii integrale a elementului de suprafață adiacent aceluia punct la aria respectivului element și care, deci, indică raportul ariilor infinit de mici care se corespund pe suprafața curbă și pe suprafața sferică”<sup>23</sup>. Desigur, în continuarea acestora, în același studiu, Gauss încearcă să exprime formal aceste lucruri, enunțând și demonstrând câteva rezultate, care mai târziu aveau să fie completate de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).

Acesta din urmă, pe lângă multele contribuții în matematică (nu doar în geometrie), a observat într-o discuție asupra suprafețelor cu măsura de curbura constantă că „Suprafețele cu măsură de curbura pozitivă se pot construi, întotdeauna, în așa fel ca fragmentele de suprafață să se poată deplasa chiar fără a le îndoi, așa ca pe sferă; acest lucru nu e posibil pe cele cu măsură de curbura negativă. Pe suprafețele cu măsură de curbura zero, în afara acestei independențe de poziție a fragmentelor de suprafață, are loc și independența de poziție a direcțiilor, ceea ce nu se întâmplă pe celelalte suprafețe”<sup>24</sup>. Câțiva ani mai târziu, aceste noțiuni și-au găsit formulări ceva mai riguroase – în sensul că progresul limbajului matematic (formal) lua avânt, dar și studiul varietăților riemanniene avansase –, într-o prelegere a lui Tullio Levi-Civita (1873-1941), din 24 decembrie 1916<sup>25</sup>.

---

<sup>23</sup> K.F. Gauss, *Cercetare generală asupra suprafețelor curbe*, traducere de Liviu Ornea, p. 6.

<sup>24</sup> Bernhard Riemann, *Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei*, traducere de Liviu Ornea, p. 7.

<sup>25</sup> Tullio Levi-Civita, *Noțiunea de paralelism într-o varietate oarecare și determinarea geometrică corespunzătoare a curburii riemanniene*, traducere de Liviu Ornea.

### Thomas Kuhn și *Structura*

În mare măsură, *Structura* lui Kuhn a provocat discuții, critici, propuneri alternative și, probabil, frustrări din partea unor filosofi ai științei. Este o lucrare despre care s-a spus că este cea mai renumită carte despre știință și că cel mai la îndemână mod „de a descrie importanța cărții lui Kuhn este de a spune că el a spulberat miturile tradiționale despre știință, în special miturile empiriste”<sup>26</sup>. Cu alte cuvinte, pentru că în paginile cărții este justificat faptul că între comportamentul științific – adică activitatea științifică propriu-zisă; ceea ce face un chimist în laborator, de exemplu – și teoriile filosofice ale cunoașterii există o discrepanță.<sup>27</sup> Ceea ce a propus Kuhn prin *Structura* a fost „o nouă imagine a științei, o imagine ce se deosebește din multe puncte de vedere de cea consacrată”<sup>28</sup>. Mai mult, lucrarea este apreciată ca una de ruptură, „o revoluție în însăși istoria și filosofia științei”<sup>29</sup>.

Pe scurt, ideile lui Kuhn sunt dezvoltate în jurul câtorva concepte cheie, precum: știință normală, paradigmă, anomalie și criză și, desigur, revoluție. Știința normală, scrie filosoful, „înseamnă cercetare bazată ferm pe una sau mai multe realizări științifice trecute, realizări pe care o anumită comunitate științifică le recunoaște, pentru o vreme, drept bază a practicii ei”<sup>30</sup>. De asemenea, asupra conceptului de paradigmă există, în primul rând, discuții asupra semnificațiilor acestuia; un interpret al operei kuhniene observând că putem distinge, printre altele, un sens „larg” și un sens „restrâns”. În primul caz, „o paradigmă este un ansamblu de idei și de metode care, atunci când sunt combinate, formează atât o perspectivă asupra lumii, cât și un mod de a face știință”<sup>31</sup>; iar sensul restrâns se referă la realizările concrete ale respectivei științe, la găsirea unor exemple sau

<sup>26</sup> Peter Godfrey-Smith, *Filosofia științei: O introducere critică în teoriile moderne*, traducere de Alexandru Anghel, București, Editura Herald, 2012, p. 122.

<sup>27</sup> *Ibidem*, p. 122.

<sup>28</sup> Mircea Flonta, „Thomas Kuhn și reorientarea istorică în filozofia științei”, în Thomas S. Kuhn, *Structura revoluțiilor științifice*, traducere de Radu J. Bogdan, prefață de Mircea Flonta, București, Humanitas, 2008, pp. 5-49, p. 6.

<sup>29</sup> Radu J. Bogdan, „Kuhn, traducătorul și această carte”, în Thomas S. Kuhn, *Structura revoluțiilor științifice*, traducere de Radu J. Bogdan, prefață de Mircea Flonta, București, Humanitas, 2008, pp. 51-53, p. 51.

<sup>30</sup> Thomas Kuhn, *Op. cit.*, p. 72.

<sup>31</sup> Peter Godfrey-Smith, *Op. cit.*, p. 125.

modele, care la rândul lor au rostul de a inspira mai departe dezvoltarea aceluși domeniu științific<sup>32</sup>. O observație importantă: Godfrey-Smith menționează că distincția de mai sus nu a fost făcută inițial de Kuhn, acesta din urmă având în vedere, în primă instanță, paradigma în sens restrâns. E foarte simplu acum de gândit faptul că știința normală este ceea ce se petrece în „interiorul” unei paradigme. Dar ce se întâmplă atunci când o asemenea paradigmă se prăbușește? Ce se întâmplă atunci când viziunea asupra lumii oferită de o anumită paradigmă nu mai satisface, în primul rând, necesitățile teoretice (la limită, intelectuale) ale oamenilor de știință? Răspunsul este simplu: o revoluție științifică. De pildă, este binecunoscută schimbarea de paradigmă furnizată de teoriile lui Copernic. Așadar, trecerea de la o paradigmă la alta este cea mai problematică. Cum are loc o astfel de revoluție? Același Godfrey-Smith sintetizează excelent ideile lui Kuhn: „respingerea unei paradigme se întâmplă numai atunci când (1) s-a ajuns la o masă critică de anomalii și (2) a apărut o paradigmă rivală”<sup>33</sup>.

Prin urmare, în cadrul unei teorii științifice apar chestiuni care nu pot fi rezolvate, probleme care nu își găsesc soluția în acea ordine de principii și idei; uneori aceste probleme sunt organizate sub forma unui puzzle și indiferent de direcția (interioară paradigmei) din care sunt abordate, nu pot fi rezolvate. Astfel apare o criză. Odată ce criza este impusă de necesitățile amintite, oamenii de știință – dar poate cel mai corect ar fi să-i menționăm pe filosofi ai acelei științe – încep să își pună întrebări cu privire la paradigma curentă. Capacitatea de a rezolva vechea problemă din vechea paradigmă pune bazele unei noi paradigme. Însă lucrurile nu sunt chiar atât de simple precum ar părea la o primă vedere. De altfel, această parte a teoriei kuhniene a fost îndelung contestată. Mai spunem că „teoria kuhniană cuprinde două tipuri de schimbare științifică care nu seamănă cu ceea ce ne-ar fi făcut să ne așteptăm filosofi empiriști ai științei. Schimbarea din interiorul științei normale este ordonată și receptivă la dovezi – însă știința normală funcționează în urma încheierii controverselor asupra ideilor fundamentale. Celălalt tip de schimbare – schimbarea revoluționară – presupune o punere la îndoială a ideilor fundamentale, dar acestea sunt episoade în care evaluarea ordonată a ideilor se prăbușește”<sup>34</sup>.

---

<sup>32</sup> *Ibidem*, p. 125.

<sup>33</sup> *Ibidem*, p. 133.

<sup>34</sup> *Ibidem*, p. 145.

## O revoluție în geometrie?

Am arătat mai sus că problema mare a geometriei euclidiene a fost axioma a cincea a setului formulat de Euclid și că de-a lungul istoriei unii matematicieni au suspectat enunțul de posibilitatea demonstrării lui. Așadar, în această privință, am putea afirma că odată ce a fost demonstrat că printr-un punct exterior unei drepte se pot construi o infinitate de drepte paralele cu dreapta dată (cazul geometriei hiperbolice) sau niciuna (cazul geometriei sferice), avem de-a face cu o revoluție în geometrie? Desigur, ar fi o revoluție în sensul secund indicat mai sus, o revoluție care contestă o idee fundamentală a geometriei euclidiene. O altă problemă: putem deduce din cele precizate că avem în fața noastră un progres nu doar al geometriei, ci al matematicii în general?

Să lămurim două chestiuni: Thomas Kuhn scrie că „rezultatul muncii creatoare înseamnă progres”<sup>35</sup>; cu alte cuvinte, pentru acesta, a progresa într-o știință ține de capacitatea de a rezolva problemele acelei științe, iar soluțiile acestor probleme au rolul de a fi cât mai precise în timp<sup>36</sup>. Pe de altă parte, progresul este incomensurabil; în general, trecerea de la o paradigmă la alta o face uitată pe cea veche; câștigăm principii și idei noi asupra științei (și asupra lumii), dar pierdem vechea viziune; revenim la exemplul cu revoluția copernicană: oamenii au pierdut viziunea geocentrică asupra lumii odată cu aceasta. În geometrie însă odată făcută trecerea către „noua” geometrie, geometria euclidiană nu și-a pierdut statutul; după cum am amintit mai sus, există chiar o preeminență a acesteia față de geometriile neeuclidiene. Prin urmare, avem de-a face cu o revoluție în geometrie sau nu? Interesant este faptul că filosofii științei când vorbesc despre revoluțiile din matematică au în vedere numai decît rezoluțiile din secolul al XX-lea. De pildă, Ilie Pârvu arată că „sursa principală a interesului pentru aspectul dinamic al cunoașterii matematice au reprezentat-o marile revoluții din matematica secolului XX: revoluția «structurală», revoluția «categorială», revoluția calculatoarelor, matematizarea cvasi-generală a științelor etc.”<sup>37</sup>. Și înaintea acestora ar mai fi, desigur, revoluția provocată discuțiile asupra fundamentelor matematicii. Richard J. Trudeau constată în prefața cărții despre revoluția

<sup>35</sup> Thomas Kuhn, *Op. cit.*, p. 227.

<sup>36</sup> Peter Godfrey-Smith, *Op. cit.*, p. 152.

<sup>37</sup> Ilie Pârvu, *Introducere în epistemologie*, București, Editura Științifică și Enciclopedică, 1984, p. 255.

geometriei că geometria neeuclidiană, în speță geometria hiperbolică, i-a adus pe oamenii de știință în ipostaza de a se întreba dacă nu cumva știința era ceva diferit de ceea ce crezuseră ei dintotdeauna<sup>38</sup>. Desigur, pentru acesta, apariția geometriei neeuclidiene reprezintă într-adevăr o revoluție; și trebuie să precizăm că afirmațiile lui Trudeau sunt cele ale unui profesor de matematică.

Într-adevăr, în secolul al XX-lea matematica a fost restructurată și putem vorbi de un progres, dar revenim la întrebarea de mai sus: geometria euclidiană încă este predată în școli, încă sunt propuse probleme noi în diverse reviste de specialitate etc. Cum explicăm acest fapt? Michael J. Crowe a scris în 1975 un scurt articol în care a oferit zece legi asupra schimbărilor din matematică, provocator deopotrivă pentru filosofii matematicii cât și pentru matematicieni, împărțindu-i în două tabere. Cea mai importantă lege din lucrarea menționată este legea a zecea, care afirmă că „În matematică nu au loc niciodată revoluții”<sup>39</sup>. Crowe justifică această lege prin apelul la scrierile unor diferiți matematicieni din perioade diferite, precum J.B. Fourier, H. Hankel sau C. Truesdell. Argumentul acestuia constă într-o distincție între două tipuri de descoperiri: unele care, de fapt, sunt transformări ale vechiului domeniu de studiu, cum ar fi transformarea astronomiei din ptolemaică în copernicană; și unele descoperiri care țin mai curând de formă, adică sunt formate noi direcții de cercetare, deci noi domenii, fără a le anihila pe cele vechi – exemplul la îndemână fiind cel al geometriilor neeuclidiene<sup>40</sup>. Totuși, Crowe remarcă acel „în” din legea de mai sus și afirmă că revoluții pot avea loc dacă vorbim de nomenclatura matematică, de simbolism, de metamatematică sau istoriografia matematicii.<sup>41</sup> Așadar, geometria hiperbolică, nu reprezintă o revoluție „în” matematică; cel mult este o transformare, într-o anumită direcție, a geometriei euclidiene, tocmai pentru faptul că nu o anihilează pe cea din urmă. De altfel, Crowe scrie că teoria lui Kuhn poate fi aplicată în istoria matematicii, dar nu „în” matematică.<sup>42</sup>

---

<sup>38</sup> Richard J. Trudeau, *The non-Euclidean revolution*, Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2001, p. viii.

<sup>39</sup> Michael J. Crowe, „Ten ‘laws’ concerning patterns of change in the history of mathematics”, în *Historia Mathematica*, Vol. 2, 1975, pp. 161-166, p. 165.

<sup>40</sup> *Ibidem*, p. 165.

<sup>41</sup> *Ibidem*, p. 166.

<sup>42</sup> *Ibidem*, p. 162.

Totuși, există destule critici aduse acestei a zecea lege a lui Crowe. De pildă, Joseph Dauben<sup>43</sup> consideră că inovațiile radicale din matematică o alterează și că deși vechea matematică rămâne, aceasta nu mai este semnificativă, trece pe o poziție inferioară<sup>44</sup>. Mai mult, în introducerea la cartea despre revoluțiile din matematică, Donald Gillies scrie că ne putem plasa într-una dintre cele două tabere, pentru că ar trebui să distingem, așadar, două tipuri de revoluții prin analogie cu revoluțiile politice: 1) revoluția din Rusia ar trebui corelată cu ideile lui Crowe, întrucât vechea paradigmă nu este păstrată și 2) revoluția de tip franco-britanic ar trebui corelată cu ideile lui Dauben, întrucât vechea paradigmă rămâne valabilă, însă într-un stadiu inferior<sup>45</sup>.

O altă replică la articolul lui Crowe, pornind de la *Structura* lui Kuhn, a fost dată de Herbert Mehrtens. Pe scurt, conceptele fundamentale kuhniene sunt analizate din perspectiva aplicabilității în matematică. Astfel, Mehrtens arată prin exemple din istoria matematicii modul în care funcționează aceasta. De pildă, acesta scrie că postulatul al cincilea al lui Euclid este o anomalie care a condus la geometrii noi și la răsturnarea metafizicii geometriei.<sup>46</sup> Totodată, „Elementele” lui Euclid ori, dacă vrem, modul în care acesta „face” matematică, reprezintă pentru Mehrtens o paradigmă exemplară<sup>47</sup>. Interesant este că autorul concluzionează că *patternurile* teoriei kuhniene nu sunt întrutotul aplicabile în matematică, dar multe dintre conceptele amintite au un rol în istoriografia matematicii.<sup>48</sup> Cu alte cuvinte, Mehrtens justifică în mare parte legile lui Crowe.

Karen François și Jean Paul Van Bendegem conchid, în urma unei discuții despre legile lui Crowe, că, pe de o parte, dezbateră despre

<sup>43</sup> Joseph Dauben, „Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge”, în Gillies, Donald, (ed.), *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press Oxford, 1992, pp. 49–71.

<sup>44</sup> Konstantinos Nikolantonakis, „Did we have ‘revolutions’ in mathematics? Examples from the history of mathematics in the light of T.S. Kuhn’s historical philosophy of science”, <https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF08013.pdf>

<sup>45</sup> Donald, Gillies, „Introduction”, în Gillies, Donald, (ed.), *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press Oxford, 1992, pp. 1-14, p. 5.

<sup>46</sup> Herbert Mehrtens, „T. S. Kuhn’s theories and mathematics: a discussion paper on the ‘new historiography’ of mathematics”, în *Historia Mathematica*, Vol. 3, 1976, pp. 297-320, p. 304.

<sup>47</sup> *Ibidem*, p. 309.

<sup>48</sup> *Ibidem*, p. 312.

revoluțiile matematice depinde în mare măsură de semnificația termenilor „revoluție” și „matematică” și nu contează dacă reușim sau nu să oferim un răspuns afirmativ sau negativ întrebării, cât timp astfel este stimulat studiul practicilor matematice.<sup>49</sup> Pe de altă parte, legile lui Crowe pot fi folosite pentru a compara matematica și științele, cu mențiunea că în matematică pot fi interpretate ca fiind legate de modul în care este gândită o demonstrație.<sup>50</sup> În sfârșit, în încercarea de a clasifica revoluțiile științifice, Ladislav Kvasz consideră că geometria hiperbolică ar fi produs o ruptură epistemică de gradul al treilea deoarece modul în care obiectele matematice sunt construite nu este schimbat<sup>51</sup>; dar, adaugă acesta, o astfel de ruptură epistemică reprezintă totuși o revoluție științifică.<sup>52</sup>

### Concluzii și implicații

Geometria neeuclidiană a avut și are o importanță deosebită nu numai în istoria matematicii, dar și în istoria gândirii. Morris Klein, vorbind despre importanța geometriei neeuclidiene, scria că la fel ca „teoria heliocentrică a lui Copernic, legea gravitației a lui Newton sau teoria evoluției a lui Darwin, geometria neeuclidiană a afectat radical știința, filosofia și religia”<sup>53</sup>. Odată cu geometria neeuclidiană a fost clarificată o distincție presupusă întotdeauna implicită: aceea dintre un spațiu matematic și un spațiu fizic<sup>54</sup>. Pe scurt, obișnuința de a gândi euclidian și verificarea „vizuală” a axiomelor sistemului de la începutul „Elementelor” au oferit oamenilor iluzia că geometria euclidiană descrie „perfect” spațiul fizic. De aceea, „odată cu crearea geometriei neeuclidiene, totuși,

---

<sup>49</sup> Karen François, Jean Paul Van Bendegem, „Revolutions in mathematics. More than thirty years after Crowe's 'Ten Laws'. A new interpretation”, în Benedikt Löwe, Thomas Müller (eds.), *Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*, College Publications, London, 2010. Texts in Philosophy 11, pp. 107-120, p. 118.

<sup>50</sup> *Ibidem*, p. 119.

<sup>51</sup> Ladislav Kvasz, „On classification of scientific revolutions”, în *Journal for General Philosophy of Science*, Vol. 30, 1999, pp. 201-232, pp. 221-222.

<sup>52</sup> *Ibidem*, p. 227.

<sup>53</sup> Morris Klein, „Geometrie și adevăr”, în Viorel Barbu (coord.), *Matematica și cunoașterea științifică*, traducere din limba engleză de Elena Mocanu, Iași, Institutul European, 2011, pp. 115-120, p. 115.

<sup>54</sup> *Ibidem*, p. 115.

matematicienii, oamenii de știință și laicii au fost obligați, în cele din urmă, să aprecieze că sistemele de gândire bazate pe declarații referitoare la spațiul fizic sunt diferite de acel spațiu fizic<sup>55</sup>.

De asemenea, importante sunt și aplicațiile ulterioare ale geometriei neeuclidiene, cum ar fi, de exemplu, teoria relativității; fără a mai vorbi aici despre disputele filosofice provocate, într-o primă măsură asupra fundamentelor matematicii, cât mai apoi asupra conceptului de spațiu – mai ales asupra concepției kantiene asupra spațiului (și timpului)<sup>56</sup>. Geometria neeuclidiană – în speță, cea hiperbolică – a atras și atenția artiștilor. Bunăoară, M.C. Escher a creat o întreagă serie de opere bazate pe geometria discului Poincaré și a planului hiperbolic; printre cele mai cunoscute opere fiind cele din seria *Circle Limit*.

Prin urmare, este limpede faptul că impactul geometriei hiperbolice în cultura științifică a fost unul esențial. Desigur, rămâne deschisă disputa, după cum am încercat să schițăm în secțiunea precedentă cu privire la măsura în care apariția geometriei hiperbolice a produs sau nu o revoluție științifică în matematică, unde accentul cade pe „în”. Totuși, credem că putem da dreptate taberei care afirmă că, într-adevăr, teoria kuhniană este aplicabilă progresului geometriei, dar cu acele anumite restricții și rețineri, fiind evidente implicațiile acestei geometrii în viața de zi cu zi a oamenilor și asupra înțelegerii lumii. Cu alte cuvinte, teza formulată în introducerea lucrării de față este argumentată în două direcții: 1) în direcția filosofiei naturale, pentru că schimbă perspectiva asupra lumii, după cum am zis, dar și 2) în direcția instrumentalității geometriei hiperbolice.

## BIBLIOGRAFIE

- BIAGIOLI, Francesca, *Space, Number, and Geometry from Helmholtz to Cassirer*, Springer, 2016.
- BOGDAN, Radu J., „Kuhn, traducătorul și această carte”, în Thomas S. Kuhn, *Structura revoluțiilor științifice*, traducere de Radu J. Bogdan, prefață de Mircea Flonta, București, Humanitas, 2008, pp. 51-53.
- CANNON, J.W., W. J. Floyd, R. Kenyon, and W. R. Parry, „Hyperbolic geometry”, MSRI Publications 31, 1997, pp. 59-115.

---

<sup>55</sup> Ibidem, p. 116.

<sup>56</sup> Francesca Biagioli, *Space, Number, and Geometry from Helmholtz to Cassirer*, Springer, 2016, p. 189.

- CROWE, Michael J., „Ten ‘laws’ concerning patterns of change in the history of mathematics”, în *Historia Mathematica*, Vol. 2, 1975, pp. 161-166.
- DAUBEN, Joseph, „Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge”, în Gillies, Donald, (ed.), *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press Oxford, 1992, pp. 49–71.
- DUMITRU, Mircea, Ornea, Liviu, „On the Preeminence of Euclidean Geometry: Nash’s Embedding Theorems”, în *Journal for General Philosophy of Science*, Vol. 56, pp: 47-57, 2025. <https://doi.org/10.1007/s10838-024-09684-7>
- EUCLID, *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*, Volume 1, trans. by T.L. Heath, Cambridge: at the University Press, 1908.
- FLONTA, Mircea, „Thomas Kuhn și reorientarea istorică în filozofia științei”, în Thomas S. Kuhn, *Structura revoluțiilor științifice*, traducere de Radu J. Bogdan, prefață de Mircea Flonta, București, Humanitas, 2008, pp. 5-49.
- FRANÇOIS, Karen, Van Bendegem, Jean Paul, „Revolutions in mathematics. More than thirty years after Crowe’s ‘Ten Laws’. A new interpretation”, în Benedikt Löwe, Thomas Müller (eds.), *Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*, College Publications, London, 2010. Texts in Philosophy 11, pp. 107-120
- GAUSS, K.F., *Cercetare generală asupra suprafețelor curbe*, traducere de Liviu Ornea. <http://gta.math.unibuc.ro/pages/teachlee.html#note>
- GILLIES, Donald, „Introduction”, în Gillies, Donald, (ed.), *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press Oxford, 1992, pp. 1-14.
- GODFREY-SMITH, Peter, *Filosofia științei: O introducere critică în teoriile moderne*, traducere de Alexandru Anghel, București, Editura Herald, 2012.
- GRAY, Jeremy, „Non-Euclidean Geometry – A Re-interpretation”, in *Historia mathematica*, 6, 1979, pp. 236–258.
- GRAY, Jeremy, *Worlds out of nothing: a course in the history of geometry in the 19th Century*, London, Springer, 2011.
- HVIDSTEN, Michael, *Exploring geometry*, Draft: October 18, 2012. <https://new.math.uiuc.edu/public402/Hvidsten.pdf>
- KLEIN, Morris, „Geometrie și adevăr”, în Viorel Barbu (coord.), *Matematica și cunoașterea științifică*, traducere din limba engleză de Elena Mocanu, Iași, Institutul European, 2011, pp. 115-120.
- KUHN, Thomas S., *Structura revoluțiilor științifice*, traducere de Radu J. Bogdan, prefață de Mircea Flonta, București, Humanitas, 2008.
- KVASZ, Ladislav, „On classification of scientific revolutions”, în *Journal for General Philosophy of Science*, Vol. 30, 1999, pp. 201–232.
- LEVI-CIVITA, Tullio, *Noțiunea de paralelism într-o varietate oarecare și determinarea geometrică corespunzătoare a curbării riemanniene*, traducere de Liviu Ornea. <http://gta.math.unibuc.ro/pages/teachlee.html#note>

- MEHRTENS, Herbert, „T. S. Kuhn’s theories and mathematics: a discussion paper on the ‘new historiography’ of mathematics”, în *Historia Mathematica*, Vol. 3, 1976, pp. 297-320.
- NIKOLANTONAKIS, Konstantinos, „Did we have ‘revolutions’ in mathematics? Examples from the history of mathematics in the light of T.S. Kuhn’s historical philosophy of science”, <https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF08013.pdf>
- OPROIU, Vasile, „Despre postulatul V al lui Euclid”, în *Recreații matematice*, II(1), 2000, pp. 23-26.
- PÂRVU, Ilie, *Introducere în epistemologie*, București, Editura Științifică și Enciclopedică, 1984.
- PENROSE, Roger, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, London, Jonathan Cape, 2004.
- RATCLIFFE, John G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Second Edition, Springer, 2006.
- RIEMANN, Bernhard, *Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei*, traducere de Liviu Ornea. <http://gta.math.unibuc.ro/pages/teachlee.html#note>
- SACCHERI, Gerolamo, *Euclid Vindicated from Every Blemish*, Edited and Annotated by Vincenzo De Risi, Translated by G.B. Halsted and L. Allegri, Birkhäuser, 2014.
- STEWART, Ian, *Îmblânzirea infinitului. Povestea matematicii*, traducere de N. Gutium, București, Humanitas, 2011.
- SUCEAVĂ, Bogdan, „Space and its deformations in the works of Nicole Oresme and Bernhard Riemann”, în *Rev. Roum. Philosophie*, 67, 2, pp. 303–311, București, 2023.
- THORGEIRSSON, Sverrir, *Hyperbolic geometry: history, models, and axioms*, Uppsala University, 2014. <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:729893/FULLTEXT01.pdf>
- TRUDEAU, Richard J., *The non-Euclidean revolution*, Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2001.
- ȚURLEA, Marin, *Filosofia matematicii*, București, Editura Universității din București, 2002.